تمرين1

1) حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث: $\forall x \in IR \setminus \{-2,2\} : \frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$

2) حدد قيمة التكامل: $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$

تمرين2

1- نضع: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

أحسب $I+J$ و $I-J$. **استنتج** I و J.

2- نضع: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$ و $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x . \sin^2 x dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

أحسب $I+J+2K$ و $I+J-2K$ و $I-J$. **استنتج** I و J و K .

3- نضع: $I = \int_0^{\pi} e^x . \sin x dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x . \cos x dx$

بين أن: $I = -J$ و $J = I - e^{\pi} - 1$. **استنتج** I و J **ثم أحسب:** $K = \int_0^{\pi} e^x . \cos^2(\frac{x}{2}) dx$

تمرين3

1) حدد دالة أصلية للدالة $f : x \mapsto \frac{x}{(x^2-1)^2}$ على المجال $]1,+\infty[$

2) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث: $\forall x \in IR \setminus \{-1,0,1\} : \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

3) باستعمال تكامل بالأجزاء أحسب: $I = \int_2^3 \frac{x . \ln x}{(x^2-1)^2} dx$

تمرين4

أحسب التكاملات التالية :

1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$

2) $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x+3) e^{2x} dx$

3) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} x^3 . \ln(3x) dx$

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \ln x$

1) حدد دالة أصلية للدالة f على $]0,+\infty[$

2) 2) باستعمال تكامل بالأجزاء أحسب: $\int_1^2 \ln(x+1) dx$.

3) استنتج حساب التكامل: $\int_1^2 \ln(\sqrt{x(x+1)}) dx$

تمرين6

-1 أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين محور الأفاصيل ومحور الأراتيب والمستقيمين : $x=0$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ ومنحنى الدالة

$$f: x \mapsto \sin(2x)$$

2- أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين منحنى الدالة f ومنحنى الدالة g والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ في الحالات التالية :

* $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=x$ مع : $a=\frac{1}{2}$ و $b=2$

* $f(x)=2x+1+\frac{x}{1+x^4}$ و $g(x)=2x+1$ مع : $a=0$ و $b=1$

تمرين7

الهدف من التمرين هو حساب التكاملات :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \text{ و } J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} \text{ و } K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$$

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\ln(x+\sqrt{2+x^2})$

1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة I

2) بين أن : $2I+J=K$

3) باستعمال تكامل بالأجزاء في حساب K بين أن : $K=\sqrt{3}-J$

4) استنتج قيم J و K

تمرين8

1- نضع : $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$

أحسب I_0 **ثم بين أن :** $\forall n\in IN:(2n+5)I_{n+1}=(2n+2)I_n$

2- نضع : $I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

أ- أحسب I_0

ب- بين ان : $\forall n\in IN:(2n+3)I_{n+1}=\sqrt{2}-(2n+2)I_n$

ج- استنتج قيمتي I_1 **و** I_2

3- أحسب التكامل : $I_m=\int_{-m}^{2m} e^{1-2|x|}dx$

تمرين 9

ليكن $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ و f دالة زوجية. بين أن : $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^x}dx=\int_0^a f(x)dx$

ثم استنتج قيمة التكامل $\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}dx$

تمرين10

1- نعتبر الدالة f **المعرفة ب:** $f(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})$

بين أن f **تقابل من** $I=[1,+\infty[$ **نحو** I **ثم عرف** f^{-1}

2- نعتبر الدالة g **المعرفة على المجال** $]1,+\infty[$ **ب:** $g(x)=\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}du$

بوضع $u=f(t)$ **أحسب** $g(x)$

تمرين11

ليكن $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ **و** f **دالة زوجية بين ان:** $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$ **ثم استنتج قيمة التكامل**

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)(1+e^x)}dx$$

تمرين12

1- أحسب التكاملات : $I = \int_{0}^{\frac{1}{2}\ln 2} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ و $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x}dx$ و $K = \int_0^1 \frac{x^3+2x^2-3}{1+x^2}dx$

2- أحسب التكاملات :

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{3+2e^{2x}}dx \quad \text{و} \quad J = \int_1^{\sqrt{3}} x\,Arc\tan\frac{1}{x}dx$$

$$K = \int_2^3 \frac{x^3+x^2+2}{x^2-x}dx \quad \text{و} \quad H = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$$

$$L = \int_{-1}^{2} \frac{1}{4x^2-4x+10}dx \quad \text{و} \quad L = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2x^2-5x+2}dx$$

تمرين13 تكامل wallis

ليكن $n \in IN$ نضع : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$

1- باستعمال تكامل بالأجزاء بين ان : $\forall n \geq 2 : I_n = \frac{n-1}{n}.I_{n-2}$

2- أحسب I_0 و I_1

3- بين أن : $\forall n \geq 1 : I_{2n} = \frac{1.3.....(2n-1)}{2.4.....2n}.\frac{\pi}{2}$

4- بين ان : $\forall n \in IN : I_{2n+1} = \frac{2.4.....2n}{1.3.....(2n-1)}.\frac{1}{2n+1}$

5- بين أن المتتالية (I_n) تناقصية

6- باستعمال العلاقة (1) بين ان : $\forall n \geq 1 : \frac{n-1}{n}.I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$

7- بين ان (صيغة واليس): $\lim_{n \to +\infty} (\frac{2.4....2n}{1.3....(2n-1)})^2.\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

تمرين14

نضع لكل n من IN : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx$

1- أحسب : I_0 و I_1

2- بين أن : $\forall n \in IN : \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos^n x.dx = \frac{1}{n+1}.I_{n+2}$

3- أحسب : I_5 و I_6

4- بين أن المتتالية (I_n) تناقصية و أنها متقاربة

5- أحسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ (يمكن استعمال المتتالية (u_n) :المعرفة ب: $u_n = (n+1).I_n.I_{n+1}$)

تمرين 15: حساب التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}.dx$

1- تحقق أن : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] : \sqrt{\tan x} = (1+\tan^2 x)\sqrt{\tan x} - \tan^2 x.\sqrt{\tan x}$

2- استنتج أن: $I = \frac{2}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x.\sqrt{\tan x}.dx$

3- بوضع: $u = \sqrt{\tan x}$ بين أن : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x.\sqrt{\tan x}.dx = 2.\int_0^1 \frac{u^6}{1+u^4}du$

4- أ- تحقق أن : $\frac{u^6}{1+u^4} = u^2 - \frac{u^2}{1+u^4}$

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^4 = -1$ ثم عمل الحدودية $1+u^4$ الى جذاء حدوديتين من الدرجة 2 بمعاملات حقيقية

5- احسب التكامل $J = \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^4}du$ ثم استنتج قيمة التكامل I

تمرين 16

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب: $\forall n \geq 1 : u_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 x^n e^x dx$ ونضع: $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

1- باستعمال تكامل بالأجزاء احسب u_1

2- بين ان : $\forall n \geq 2 : u_n = \frac{e}{n!} - u_{n-1}$

3- باستعمال برهان بالترجع بين أن: $\forall n \geq 1 : u_n = (-1)^n.[e(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}) - 1]$

4- بين أن : $\forall n \geq 1 : 0 \leq u_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$

5- استنتج أن: $\lim p_n = \frac{1}{e}$ وأن: $\forall n \geq 1 : \left| p_n - \frac{1}{e} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$