فرض رقم 1 — الثانية ع رياضية ب — المدة : ساعتان — اكتوبر 2013

تمرين1 (أسئلة مستقلة فيما بينها) **(8 نقط)**

1- f دالة متصلة في النقطة 0 وتحقق: $\forall (x,y) \in IR^2 : f(x+y) = f(x) + f(y)$

أ- بين أن: $f(0) = 0$. 0,5

ب- بين ان : $\forall a \in IR : f(-a) = -f(a)$ 0,5

ج- بين أن الدالة f متصلة على IR. 1

2- أ- بين أن : $\forall n \in IN : Arc\tan(n+2) - Arc\tan(n+1) = Arc\tan(\frac{1}{n^2+3n+3})$ 1

ب- استنتج بدلالة n المجموع: $S_n = \sum_{k=0}^{n} Arc\tan(\frac{1}{k^2+3k+3})$ 1

3- ليكن : $x \in IR$ **بسط التعابير** 1,5

أ- $\sin(Arc\tan x)$ **ب-** $Arc\tan(\sqrt{1+x^2} - x)$

ج- $Arc\tan(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x})$ **: يمكن وضع :** $x = \tan(\alpha)$ **مع** $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ 1

4- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\text{Arctan}(2x) = 2\text{Arctan}(\frac{x}{2})$ **بعد التأكد من وجود حلول لها** 1,5

تمرين2 (نقطتان ونصف)

نعتبر الدالة f المعرفة ب:
$$\begin{cases} f(x) = \sin x . E(\frac{1}{x}), x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- بين أن : $\forall x \in IR^* : \left| f(x) - \frac{\sin x}{x} \right| \leq |\sin x|$ 1

2- استنتج أن الدالة f متصلة في النقطة 0 1

3- هل f متصلة في النقطة 1؟ 0,5

تمرين3 (4 نقط ونصف)

بين أن: $\forall (a,b) \in IR^2 : ab \prec 1 \Rightarrow \arctan a + \arctan b = \arctan(\frac{a+b}{1-ab})$ — 1,5

بين أن : $2\arctan(\frac{1}{5}) = Arc\tan\frac{5}{12}$ — 1

بين أن : $4\arctan(\frac{1}{5}) = Arc\tan\frac{120}{119}$ — 1

استنتج أن : $\boxed{4\arctan(\frac{1}{5}) - Arc\tan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}}$ **formule de MACHIN** — 1

تمرين4 (5 نقط)

نعتبر الدالة f **المعرفة ب :** $f(x) = Arc\tan(\frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}})$

1- حدد D_f **والنهايات عند محداته** — 1

1- نضع: $x = \tan\alpha$ **حيث:** $-\frac{\pi}{2} \prec \alpha \prec \frac{\pi}{2}$

بين أن: $\forall x \in D_f : f(x) = Arc\tan(\tan(\alpha - \frac{\pi}{6}))$ — 1,5

2- حدد صيغة $f(x)$ **على كل واحد من المجالين:** $]-\infty,-\sqrt{3}[$ **و** $]-\sqrt{3},+\infty[$ — 1,5

3- حل في IR **المعادلة :** $f(x) = \frac{\pi}{6}$ — 1

تمرين5 (نقطتان ونصف)

نعتبر الدالة f **المعرفة على** $\mathbb{R}$ **ب:** $f(x) = x - \sin x$

1- بين أن الدالة f **تقبل دالة عكسية** f^{-1} — 1

2- بين أنه توجد دالة وحيدة g **متصلة على** IR **(يتم تحديدها) تحقق:** — 1

$$\forall x \in IR : g(x) - \sin(g(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

التمرين 1

أحسب النهايات التالية :

1- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

2- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+2x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+x+2}$

3- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{Arctan}(\frac{1}{x^2})-\frac{\pi}{2}}{x^2}$

4- $\lim\limits_{x \to -\infty} Arc\tan\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right)$

التمرين 2

بسط التعابير التالية:

1- $\text{Arctan}(\tan x)$ **حيث** $x \in \left]\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right[$

2- $Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ **: يمكن وضع :** $x = \tan(\alpha)$ **مع** $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

التمرين3

حل في IR **المعادلات :**

1- $\text{Arctan}\left(\dfrac{1-x^2}{2x}\right)+2\,\text{Arctan}(x)=\dfrac{\pi}{2}$

2- $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}$

التمرين4

نعتبر الدالة f **المعرفة ب:** $f(x)=\text{Arctan}(x-1)-\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1- **حدد مجموعة تعريف الدالة** f **ثم أدرس تغيراتها**

2- **استنتج أن المعادلة** $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا في** IR^{+*}

3- **حل في** IR **المعادلة :** $f(x)=0$

التمرين5

نعتبر الدالة f **المعرفة ب:** $f(x)=\sqrt[5]{-x^2+2x}$

1- **حدد مجموعة تعريف الدالة** f

2- **ليكن** g **قصور** f **على المجال** $[0,2]$

أ- **أدرس تغيرات الدالة** g

ب- **بين أن الدالة** g **تقبل دالة عكسية محددا مجموعة تعريفها و تعبيرها**

التمرين 6

نعتبر الدالة f **المعرفة ب:** $f(x)=(-1)^{E(x)}.(x-E(x))$

1- **بين أن العدد 2 دور للدالة** f

2- **حدد تعبير** f **على كل من المجالين** $[0,1[$ **و** $[1,2[$

3- **أدرس اتصال الدالة** f **على** IR

4- **أنشئ المنحنى الممثل للدالة** f **على المجال** $[-2,4]$

التمرين7

نعتبر الدالة f **المعرفة على** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ **ب:** $f(x)=\operatorname{Arctan}(\sqrt{\tan x})$

1- **بين أن الدالة** f **تقبل دالة عكسية** g **معرفة على مجال** J **يتم تحديده**

2- **حدد** $g(x)$ **لكل** x **من** J

3- **حل في المجال** J **المعادلة :** $g(x)=x$