تمرين 1

استعمل البابليون (2000 سنة ق م) الطريقة التالية لتأطير الجذور المربعة لبعض الأعداد الصحيحة الطبيعية_لتأطير $\sqrt{5}$ مثلا ننطلق من عدد صحيح طبيعي أكبر من $\sqrt{5}$ مثلا 3 ونعرف المتتالية (u_n) ب: $u_{n+1} = \frac{1}{2}.(u_n + \frac{5}{u_n})$ والمتتالية (v_n) ب: $v_n = \frac{5}{u_n}$.

A- 1)- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ ب: $f(x) = \frac{1}{2}.(x + \frac{5}{x})$

أ- بين أن $\forall x \in]0,+\infty[: f(x) - f(\sqrt{5}) = \frac{1}{4x}.(x - \sqrt{5})^2$ **واستنتج أن f تقبل قيمة دنوية وحددها.**

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد $\sqrt{5}$

2) بين أن : $\forall x \in]0,+\infty[: f(x) - x = \frac{5 - x^2}{2x}$ **واستنتج أن :** $\forall x \geq \sqrt{5} : f(x) \leq x$

استنتج ان المتتالية (u_n) تناقصية.

B – 1) بين أن (v_n) مكبورة بالعدد $\sqrt{5}$ وتزايدية .

2) بين أن $\forall n \in IN : v_0 \leq v_1 \leq .... \leq v_n \leq ... \leq \sqrt{5} \leq ... \leq u_n \leq ... \leq u_1 \leq u_0$.

أحسب الحدود الأولى للمتتاليتين ثم حدد تأطيرا للعدد $\sqrt{5}$ إلى 10^{-3} .

C- حدد نهاية المتتاليتين (u_n) و (v_n)

تمرين2 **نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب:** $u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4u_n - 2}$ **و** $u_0 \in IR$

1) أ- حدد u_n في حالة $u_0 = 0$ و في حالة $u_0 = \frac{3}{2}$

ب- بين أن : $\forall n \in IN : u_n \neq \frac{1}{2}$

ج- بين أن : $\forall n \in IN : u_{n+1} = \frac{1}{2}.\left[1 - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \right]$

2) نعرف المتتالية (v_n) ب: $\forall n \in IN^* : v_n = u_n - \frac{1}{2}$

ا- بين أن : $\forall n \in IN^* : v_{n+1} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{v_n}$

ب- إذا كان : $u_0 = -\frac{1}{2}$ أحسب v_0 .حدد تعبير v_n ثم u_n بدلالة n .

تحقق من أن المتتاليتين (v_n) و (u_n) متتاليات دورية.

تمرين 3

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} \ ; n \in IN \\ u_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$

1- بين ان : $\forall n \in IN : 0 \prec u_n \prec 1$ ثم ادرس رتابة المتتالية (u_n)

2- نضع : $\forall n \in IN : v_n = \frac{1 - u_n}{1 + u_n}$

أ- بين ان المتتالية (v_n) هندسية

ب- احسب u_n بدلالة n ثم حدد نهايتها

3- نضع : $\forall n \in IN : S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + u_k}$

بين ان : $\forall n \in IN : S_n = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{8}(1 - \frac{1}{5^n})$

تمرين4

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{2nu_n + n + 3}{3n + 3} ; n \in IN^* \end{cases}$

1- أ- بين ان : $\forall n \in IN^* : u_n \leq 1$

ب- بين ان المتتالية (u_n) تزايدية

2- نضع: $\forall n \in IN^* : v_n = n(1 - u_n)$

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية

ب- احسب v_n ثم u_n بدلالة n حدد نهاية المتتالية (u_n)

ج- نضع : $S_n = \sum_{k=1}^{n} k.u_k$ احسب S_n بدلالة n لكل n من IN^*

تمرين5 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}} \ ; n \in IN^* \\ u_1 = 2 \end{cases}$

1- بين ان : $\forall n \in IN^* : u_n \succ \sqrt{3}$

2- ادرس رتابة المتتالية (u_n)

3- ا- تحقق أن : $\forall n \in IN^* : u_{n+1}{}^2 - 3 = \frac{u_n{}^2 - 3}{1 + u_n{}^2}$

ب- استنتج أن : $\forall n \in IN^* : u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{u_n + \sqrt{3}}{(1 + u_n{}^2)(u_{n+1} + \sqrt{3})}.(u_n - \sqrt{3})$

4- بين أن : $\forall n \in IN^* : 0 \prec u_n - \sqrt{3} \leq (\frac{1}{2\sqrt{3}})^n$

تمرين6

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب:
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4(1 - u_n)} & ; n \in IN \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

نضع : $\forall n \in IN : v_n = \frac{1}{2u_n - 1}$

بين ان المتتالية (v_n) حسابية

احسب u_n بدلالة n

نضع : $\forall n \in IN : S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2u_k}{2u_k - 1}$. احسب S_n بدلالة n

تمرين 7 العدد الذهبي

1- حل في IR المعادلة: $x^2 - x - 1 = 0$

2- نرمز للحل الموجب ب : φ بين أن :
$$\begin{cases} \varphi = \sqrt{1 + \varphi} \\ \varphi = \frac{\varphi^2 + 1}{2\varphi - 1} \\ \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \end{cases}$$

3- نعتبر المتتالية المعرفة ب: $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \end{cases}$ بين أن: $\forall n \in IN : \frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$

4- نعتبر الدالة العددية المعرفة ب: $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

أ- تحقق ان $f(\varphi) = \varphi$

ب- بين أن : $\forall (x, y) \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[^2 \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{4}{9}\left|x - y\right|$

ج- بين أن: $\forall n \in IN : \left|a_{n+1} - \varphi\right| \leq \frac{4}{9}\left|a_n - \varphi\right|$

د- استنتج أن : $\forall n \in IN : \left|a_n - \varphi\right| \leq (\frac{4}{9})^n$

ه- حدد عدد صحيح طبيعيا p أصغر ما يمكن بحيث: $\forall n \in IN : (n \geq p \Rightarrow \left|a_n - \varphi\right| \leq 0,1)$